e3a PSI B (4 heures)
calculatrices interdites.

Les candidats veilleront à justifier leurs démonstrations exclusivement à l'aide des outils du programme de la filière

Exercice 1.

Le plan usuel est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit Γ la courbe paramétrée, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$x(t) = t^2 \quad \text{et} \quad y(t) = 2t$$

On appelle *podaire de* Γ *par rapport à un point* P *du plan*, l'ensemble des projetés orthogonaux de P sur les tangentes à Γ.

1. Donner une équation cartésienne de Γ.

2. Reconnaître Γ et en donner les éléments caractéristiques.

3. Soit M un point de Γ de paramètre t. Déterminer une équation de la tangente à Γ en M.

4. Soit F le point de coordonnées $(1, 0)$. Vérifier que la podaire de Γ par rapport à F est une droite que l'on reconnaîtra.

5. On cherche dans cette question à déterminer la podaire γ de Γ par rapport à O.

5.1 Déterminer des équations paramétriques de γ.

5.2 Représenter graphiquement (feuille de paier millimétré fournie) les courbes γ et Γ dans un même repère. On étudiera soigneusement les éventuels points stationnaires et branches infinies de la courbe γ.

Exercice 2.

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie A.

1. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+(nx)^2}$ converge.
On définit alors la fonction f de I dans $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(nx)^2}$.

2. Déterminer le sens de variation de f.

3. Prouver que f est de classe C^1 sur I.

4. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

5. **5.1** Vérifier que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in I, \ \frac{1}{1+(p+1)^2x^2} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{1+t^2x^2} \leq \frac{1}{1+p^2x^2}$$

5.2 En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

6. Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Partie B.

1. Justifier pour tout $x \in I$, l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}\, dt$.

2. On définit alors la fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ en posant $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{xt}-1}\, dt$. Montrer que φ est continue sur I.

3. Le but de cette question est de montrer que $\varphi = f$.

3.1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I$. Justfier l'existence de l'intégrale $J_k = \int_0^{+\infty} e^{-kxt}\sin(t)\, dt$. Vérifier que l'on a $J_k = \frac{1}{1+k^2x^2}$.

3.2 Conclure.

Exercice 3.

Soit E un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté $(.|.)$ et la norme associée $\|.\|$.
On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ tels que la propriété (P) suivante soit vérifiée :

$$(P)\ :\ \forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$$

On désigne par F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{B}$.
On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit la matrice symétrique $A = ((e_i|e_j))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. **1.1** Soit $x \in F^{\perp}$. Calculer $\|x\|^2$.

1.2 En déduire que E est de dimension finie.

2. Dans cette question, et uniquement celle-ci, on suppose $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\},\ \|e_i\| \geq 1$. Montrer qu'alors $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

3. Dans cette question, et uniquement celle-ci, on suppose que $\mathcal{B}$ est une famille libre de E.

3.1 Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

3.2 Enoncer une identité de polarisation liant produit scalaire et norme associée.

3.3 En utilisant la propriété (P), démontrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ (x|y) = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)(y|e_i)$.

3.4 Montrer que l'on a $A^2 = A$.

3.5 Soit a l'endomorphisme de E dont A est la matrice dans la base $\mathcal{B}$. Déterminer le noyau de a.

3.6 En déduire que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Dans tout l'exercice, on identifie un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et sa matrice colonne associée d'une part et un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ avec sa matrice canoniquement associée, d'autre part.
I_n désigne la matrice identité d'ordre n.
Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$.
On considère $\mathcal{N}$ la norme subordonnée à $\|.\|$, c'est à dire telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\mathcal{N}(A) = \sup_{\|X\|\leq 1} \|AX\|$$

On rappelle que l'on a $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \mathcal{N}(AB) \leq \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$.

1. Démontrer que l'on a $\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \|AX\| \leq \mathcal{N}(A)\|X\|$.

2. Prouver qu'il existe $X_0 \in \mathbb{C}^n$, $X_0 \neq 0$, tel que l'on a $\mathcal{N}(A) = \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$.

3. Vérifier l'égalité $\mathcal{N}(I_n) = 1$.

On rappelle que la norme $\mathcal{N}_\infty$ est définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$\mathcal{N}_\infty(A) = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$$

4. Justifier, sans le calculer, l'existence de deux réels positifs α et β tels que l'on a

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \alpha \mathcal{N}_\infty(A) \leq \mathcal{N}(A) \leq \beta \mathcal{N}_\infty(A)$$

Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe du groupe multiplicatif $GL_n(\mathbb{C})$ qui possède la propriété suivante :

$$\forall A \in \mathcal{G},\ \mathcal{N}(A - I_n) \leq 1$$

ce que l'on peut traduire par : $\mathcal{G}$ est inclus dans la boule fermée de centre I_n et de rayon 1 pour la norme $\mathcal{N}$.

5. Montrer que l'ensemble $\mathcal{G}$ est borné pour la norme $\mathcal{N}$.

6. Soient $A \in \mathcal{G}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

6.1 Justifier que $A^k \in \mathcal{G}$.

6.2 Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Justifier que λ est non nul et déterminer $A^k X$.

6.3 Montrer que l'on a $\|(A^k - I_n)X\| \leq \|X\|$. En déduire les inégalités $|\lambda^k - 1| \leq 1$ puis $||\lambda^k| - 1| \leq 1$.

6.4 Démontrer que $|\lambda| = 1$. *On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde et distinguer les cas* $|\lambda| > 1$ *et* $|\lambda| < 1$.

On pose dans la suite de cette question $\lambda = e^{i\theta}$ où $\theta \in [-\pi, \pi]$.

6.5 Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $|\cos(k\theta) - 1| \leq 1$, puis $\cos(k\theta) \geq 0$.

6.6 Montrer alors successivement que l'on a $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$ puis $\forall q \in \mathbb{N},\ \theta \in [-\pi/2^q, \pi/2^q]$.

6.7 En déduire $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$.

7. Dans toute cette question, on étudie le cas $n = 2$. Soit A une matrice non diagonalisable de $\mathcal{G}$.

7.1 Montrer que A est semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un complexe non nul.

7.2 Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Calculer T^m puis $\mathcal{N}_\infty(T^m)$.

7.3 Démontrer $\lim_{m \to +\infty} \mathcal{N}(T^m) = +\infty$, puis $\lim_{m \to +\infty} \mathcal{N}(A^m) = +\infty$.

7.4 En déduire que toute matrice de $\mathcal{G}$ est diagonalisable.

7.5 Décrire alors l'ensemble $\mathcal{G}$.